2. При малых отношениях стороны квадратного отверстия к наружной стороне квадратного штампа у внутреннего края штампа появляются растягивающие контактные напряжения при симметричном нагружении силой P. Например, для $h/b = 1/2$ этот эффект проявляется при $a/b = 1/6$.

3. Коэффициенты k_ϕ для определения углов поворота квадратных штампов с квадратным симметричным отверстием (табл. 2) с увеличением относительной толщины слоя h/b сначала незначительно возрастают, а затем асимптотически монотонно убывают.

Литература

1. *Самородов А.В., Лучковский И.Я.* Исследование осадок основания линейно-деформируемого слоя, загруженного гибкой равномерно распределенной нагрузкой по площади квадрата с квадратным вырезом // Новини науки Приднипров'я, 4, 2004. С. 53—59.
2. *Жемочкин Б.Н., Синицын А.П.* Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Стройздат, 1962. — 262 с.
3. *Рабинович И.М.* Курс строительной механики стержневых систем. Ч.II. Статически неопределимые системы. — М.: Госстройиздат, 1954. — 544 с.
4. *Босаков С.В.* Статические расчеты плит на упругом основании. — Мн.: БГПА, 2002. — 128 с.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1098 с.
6. *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1990. — 400 с.

Literatura

1. *Samorodov A.V., Luchkovskiy I.Ya.* Issledovanie osadok osnovaniya lineyno-deformiruemogo sloya, zagruzhennogo gibkoy ravnomerno raspredelennoy nagruzkoy po ploschadi kvadrata s kvadratnyim vyirezom // Novini nauki Pridniprov'ya, 4, 2004. S. 53—59.
2. *Zhemochkin B.N., Sinitsyin A.P.* Prakticheskie metodyi rascheta fundamentnyih balok i plit na uprugom osnovanii. – M.: Stroyzdat, 1962. — 262 s.
3. *Rabinovich I.M.* Kurs stroitelnoy mehaniki sterzhnevyih sistem. Ch.II. Staticheski neopredelimyie sistemyi. — M.: Gosstroyizdat, 1954. — 544 s.
4. Bosakov S.V. Staticheskie raschetyi plit na uprugom osnovanii. — Mn.: BGPA, 2002. — 128 s.
5. *Gradshteyn I.S., Ryizhik I.M.* Tablitsyi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy. — M.: Fizmatgiz, 1963. — 1098 s.
6. *Aleksandrov A.V., Potapov V.D.* Osnovyi teorii uprugosti i plastichnosti. — M.: Vyisshaya shkola, 1990. — 400 s.

УДК 624.044

Е.И. БРИТВИН, канд. физ.-мат. наук
ДПСК, г. Днепропетровск, Украина

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

На базе аналитического решения полной системы уравнений деформации тонкостенных стержней открытого профиля строится матрица жесткости элемента. Решение дается с учетом деформации сдвига как от поперечных сил, так и от крутящего момента, ответственного за стесненное кручение.

Ключевые слова: *расчет конструкций, конечный элемент, тонкостенный стержень, депланация, бимомент, матрица жесткости тонкостенного стержня.*

Принято считать, что деформация сдвига мало влияет на напряженное состояние стержней. Заметным это влияние становится только у достаточно коротких стержней. В то же время, как было показано в ряде исследований, для тонкостенных стержней это влияние может быть весьма существенным уже для стержней средней длины. Как было показано в работе [2], на примере двутавра высотой 24 см и длиной 200 см, погрешность от игнорирования деформаций сдвига в отдельных компонентах матрицы жесткости достигала 43 %. В той же работе был продемонстрирован еще более интересный эффект влияния сдвиговых деформаций – появление депланации от поступательного смещения концов стержня. Учитывая, что конечная цель всех этих построений – адаптировать теорию тонкостенных стержней к реальному расчету конструкций, неизбежно возникает задача построения как можно более точной матрицы жесткости тонкостенного стержневого элемента. Проблема точности построения матрицы жесткости становится еще бо-

лее актуальна в рамках изысканий автора [1], где был предложен полуаналитический метод формирования депланационных компонент реакций узла. Реализация метода, оказалось, напрямую зависимой от точности построения матрицы жесткости отдельного взятого тонкостенного стержня. В этой связи учет влияния деформации сдвига стал для данной теории критически важным. В работах [3] и [4] приведен алгоритм формирования матрицы жесткости тонкостенных стержней с учетом влияния деформации сдвига. Алгоритм основан на формировании функционала энергии стержня с подбором подходящих аппроксимаций функций деформации. Компоненты матрицы жесткости находятся прямым дифференцированием функционала по концевым перемещениям стержня. В настоящей работе строится матрица жесткости произвольного (несимметричного) тонкостенного стержня на базе точного решения уравнений деформации с учетом сдвигающих усилий, выраженного в квадратурах.

Полная система уравнений деформации тонкостенного стержня с учетом деформации сдвига, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\zeta}{dz}=\frac{N}{EF},\\
&\frac{d^4\xi}{dz^4}=\frac{q_x}{EJ_{xx}}+k_{xx}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{Q_x}{GF}\right)+k_{xy}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{Q_y}{GF}\right)+k_{x\omega}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right),\\
&\frac{d^4\eta}{dz^4}=\frac{q_y}{EJ_{yy}}+k_{yx}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{Q_x}{GF}\right)+k_{yy}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{Q_y}{GF}\right)+k_{y\omega}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right),\\
&\frac{d^3\theta}{dz^3}+\frac{M_\omega}{EJ_{\omega\omega}}=k_{\omega x}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{Q_x}{GF}\right)+k_{\omega y}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{Q_y}{GF}\right)+k_{\omega\omega}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right),\\
&GJ_d\frac{d^2\theta}{dz^2}+\frac{dM_\omega}{dz}=-m_z.
\end{aligned}\qquad(1)$$

Здесь $\zeta(z)$ — продольные перемещения центра тяжести сечения, $\xi(z)$, $\eta(z)$ — поперечные перемещения точек, расположенных на оси, проходящей через центр изгиба сечения соответственно, вдоль главных осей сечения x и y; $\theta(z)$ — угол поворота сечения вокруг продольной оси; N, Q_x и Q_y – продольная и поперечные силы в сечении; M_ω – часть крутящего момента, ответственная за стесненное кручение; F – площадь поперечного сечения; J_{xx} и J_{yy} — моменты инерции, вычисленные относительно главных осей (индексы соответствуют подынтегральным выражениям при вычислении моментов); J_d –момент инерции свободного кручения; $J_{\omega\omega}$ — секториальный момент инерции, вычисленный относительно центра изгиба; коэффициенты k_{sr} – коэффициенты сдвига; q_x, q_y и m_z – распределенная нагрузка, приложенная вдоль оси, проходящей через центр изгиба и распределенный крутящий момент.

Если положить $Q_x=const$, $Q_y=const$ и $m_z=0$, то, решая совместно последние два уравнения (1), имеем

$$M_\omega=\frac{sh\left[\lambda(l-z)\right]M_{\omega0}+sh(\lambda z)M_{\omega l}}{sh(\lambda l)},$$

$$\theta=\left(1-\frac{z}{l}\right)\theta_0+\frac{z}{l}\theta_l+\frac{ch\left[\lambda(l-z)\right]-\left[ch(\lambda l)-1\right]\left(1-\frac{z}{l}\right)-1}{\lambda sh(\lambda l)}\frac{M_{\omega0}}{GJ_d}-\frac{ch(\lambda z)-\left[ch(\lambda l)-1\right]\frac{z}{l}-1}{\lambda sh(\lambda l)}\frac{M_{\omega l}}{GJ_d}.\qquad(2)$$

где $\lambda^2=\frac{1}{\mu}\frac{GJ_d}{EJ_{\omega\omega}}$ и $\mu=1+k_{\omega\omega}\frac{GJ_d}{GF}$, а q_0, $M_{\omega0}$ и q_l, $M_{\omega l}$ – значения угла закручивания и крутящего момента M_ω в начале и конце стержня. Используя представление депланации $\delta=\frac{d\theta}{dz}-k_{\omega\omega}\frac{M_\omega}{GF}-k_{\omega x}\frac{Q_x}{GF}-k_{\omega y}\frac{Q_y}{GF}$, выразим моменты $M_{\omega0}$ и $M_{\omega l}$ через значения депланации в начале и конце стержня d_0 и d_l:

$$\begin{aligned}
M_{\omega0}&=\frac{GJ_d}{D}\left\{\lambda lsh(\lambda l)\left(\frac{\theta_l-\theta_0}{l}-\alpha_\omega\right)-\frac{\mu\lambda lsh(\lambda l)-ch(\lambda l)+1}{\mu}\delta_0-\frac{ch(\lambda l)-1}{\mu}\delta_l\right\},\\
M_{\omega l}&=\frac{GJ_d}{D}\left\{\lambda lsh(\lambda l)\left(\frac{\theta_l-\theta_0}{l}-\alpha_\omega\right)-\frac{ch(\lambda l)-1}{\mu}\delta_0-\frac{\mu\lambda lsh(\lambda l)-ch(\lambda l)+1}{\mu}\delta_l\right\},
\end{aligned}\qquad(3)$$

(здесь $\alpha_\omega = k_{\omega x}\frac{Q_x}{GF} + k_{\omega y}\frac{Q_y}{GF}$ и $D = \mu\lambda l sh(\lambda l) - 2\left[ch(\lambda l) - 1\right]$). Вычислим полный момент кручения M_z и бимомент B_ω по формулам $M_z = GJ_d\theta' + M_\omega$ и $B_\omega = -EJ_{\omega\omega}\delta'$

$$M_z = GJ_d\left\{\frac{\mu\lambda l sh(\lambda l)}{D}\frac{\tilde{\theta}_l - \tilde{\theta}_0}{l} - \frac{ch(\lambda l) - 1}{D}(\delta_0 + \delta_l)\right\} - GJ_d\frac{2\left[ch(\lambda l) - 1\right]}{D}\alpha_\omega,$$

$$B_\omega = -\frac{ch\left[\lambda(l - z)\right]M_{\omega 0} - ch(\lambda z)M_{\omega l}}{\lambda sh(\lambda l)}.$$

Откуда, на концах стержня, получаем

$$\begin{aligned}
M_{z0} &= M_{zl} = GJ_d\left\{\frac{\mu\lambda l sh(\lambda l)}{D}\frac{\theta_l - \theta_0}{l} - \frac{ch(\lambda l) - 1}{D}(\delta_0 + \delta_l)\right\} - GJ_d\frac{2\left[ch(\lambda l) - 1\right]}{D}\alpha_\omega,\\
B_{\omega 0} &= \frac{GJ_d}{D}\left\{-\left[ch(\lambda l) - 1\right](\theta_l - \theta_0) + \frac{\mu\lambda l ch(\lambda l) - sh(\lambda l)}{\mu\lambda}\delta_0 + \frac{sh(\lambda l) - \mu\lambda l}{\mu\lambda}\delta_l\right\} + GJ_d\frac{ch(\lambda l) - 1}{D}l\alpha_\omega,\\
B_{\omega l} &= \frac{GJ_d}{D}\left\{\left[ch(\lambda l) - 1\right](\theta_l - \theta_0) - \frac{sh(\lambda l) - \mu\lambda l}{\mu\lambda}\delta_0 - \frac{\mu\lambda l ch(\lambda l) - sh(\lambda l)}{\mu\lambda}\delta_l\right\} - GJ_d\frac{ch(\lambda l) - 1}{D}l\alpha_\omega.
\end{aligned} \tag{4}$$

Перейдем к решению второго и третьего уравнений (1). Поскольку в нашем случае также и $q_x = q_y = 0$, второе и третье уравнения (1) приобретают простой вид

$$\begin{aligned}
\frac{d^4\xi}{dz^4} &= k_{x\omega}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right),\\
\frac{d^4\eta}{dz^4} &= k_{y\omega}\frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

При этом надо учесть, что наличие перерезывающих сил создает постоянный сдвиг по длине стержня, выражающийся в дополнительном угле поворота сечений: для переменной x — $\alpha_y = k_{xx}\frac{Q_x}{GF} + k_{xy}\frac{Q_y}{GF}$, для переменной h — $\alpha_x = k_{yx}\frac{Q_x}{GF} + k_{yy}\frac{Q_y}{GF}$. Кроме того, дополнительный сдвиг возникает и от действия крутящего момента M_ω (это видно из структуры уравнений (1)). Для переменной ξ он составляет: в начале стержня $\psi_{y0} = k_{x\omega}\frac{M_{\omega 0}}{GF}$, в конце — $\psi_{yl} = k_{x\omega}\frac{M_{\omega l}}{GF}$. И, соответственно, для переменной η — $\psi_{x0} = k_{y\omega}\frac{M_{\omega 0}}{GF}$ и $\psi_{xl} = k_{y\omega}\frac{M_{\omega l}}{GF}$. Ситуация с углами ψ не столь очевидна, как с углами α_y и α_x, но анализ показывает, что только при таком допущении можно получить симметричную по всем компонентам матрицу жесткости стержня. Таким образом, уравнения (5) надо решить при граничных условиях $\xi(0) = \xi_0$, $\xi(l) = \xi_l$, $\xi'(0) = \varphi_0 + \alpha_y + \psi_{y0}$, $\xi'(l) = \varphi_0 + \alpha_y + \psi_{yl}$ и $\eta(0) = \eta_0$, $\eta(l) = \eta_l$, $\eta'(0) = -f_0 + \alpha_x + \psi_{x0}$, $\eta'(l) = -f_0 + \alpha_x + \psi_{xl}$.

Проинтегрируем уравнения (5) при заданных граничных условиях и вычислим значения перерезывающих сил по формулам

$$\begin{aligned}
\frac{Q_x}{EJ_{xx}} &= -\frac{d^3\xi}{dz^3} + k_{xx}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{Q_x}{GF}\right) + k_{xy}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{Q_y}{GF}\right) + k_{x\omega}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right),\\
\frac{Q_y}{EJ_{yy}} &= -\frac{d^3\eta}{dz^3} + k_{yx}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{Q_x}{GF}\right) + k_{yy}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{Q_y}{GF}\right) + k_{y\omega}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right).
\end{aligned}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}
Q_x &= -EJ_{xx}\left\{U + k_{\omega x}\frac{12}{l^2}f\frac{GJ_d}{GF}S + \frac{12}{l^2}\alpha_y - k_{\omega x}\frac{12}{l^2}f\frac{GJ_d}{GF}\alpha_\omega\right\};\\
Q_y &= -EJ_{yy}\left\{V + k_{\omega y}\frac{12}{l^2}f\frac{GJ_d}{GF}S + \frac{12}{l^2}\alpha_x - k_{\omega y}\frac{12}{l^2}f\frac{GJ_d}{GF}\alpha_\omega\right\},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\text{где}\quad U = \frac{12}{l^3}\xi_0 + \frac{6}{l^2}\varphi_0 - \frac{12}{l^3}\xi_l + \frac{6}{l^2}\varphi_l,\quad V = \frac{12}{l^3}\eta_0 - \frac{6}{l^2}\phi_0 - \frac{12}{l^3}\eta_l - \frac{6}{l^2}\phi_l,$$

$$S = \frac{\theta_l - \theta_0}{l} - \frac{\delta_0 + \delta_l}{2}\quad\text{и}\quad f = 2\frac{ch(\lambda l) - 1}{D}. \tag{7}$$

Подставляя в (6) выражения для α_x, α_y и α_w, приходим к системе двух уравнений относительно Q_x и Q_y. Решение этой системы уравнений имеет вид:

$$Q_x = EJ_{xx}\left(-\frac{1+\chi_{yy}}{\Delta}U + \frac{\chi_{yx}}{\Delta}V - \kappa_x S\right),$$
$$Q_y = EJ_{yy}\left(-\frac{1+\chi_{xx}}{\Delta}V + \frac{\chi_{xy}}{\Delta}U - \kappa_y S\right). \qquad (8)$$

где

$$\chi_{xx} = \frac{12}{l^2}\frac{EJ_{xx}}{GF}\left(k_{xx} - k_{\omega x}k_{\omega x}f\frac{GJ_d}{GF}\right), \quad \chi_{xy} = \frac{12}{l^2}\frac{EJ_{xx}}{GF}\left(k_{xy} - k_{\omega x}k_{\omega y}f\frac{GJ_d}{GF}\right),$$
$$\chi_{yx} = \frac{12}{l^2}\frac{EJ_{yy}}{GF}\left(k_{yx} - k_{\omega y}k_{\omega x}f\frac{GJ_d}{GF}\right), \quad \chi_{yy} = \frac{12}{l^2}\frac{EJ_{yy}}{GF}\left(k_{yy} - k_{\omega y}k_{\omega y}f\frac{GJ_d}{GF}\right),$$
$$\kappa_x = \frac{12}{l^2}f\frac{GJ_d}{GF}\frac{k_{\omega x} + k_{\omega x}\chi_{yy} - k_{\omega y}\chi_{yx}}{\Delta}, \quad \kappa_y = \frac{12}{l^2}f\frac{GJ_d}{GF}\frac{k_{\omega y} + k_{\omega y}\chi_{xx} - k_{\omega x}\chi_{xy}}{\Delta}, \qquad (9)$$
$$\Delta = (1+\chi_{xx})(1+\chi_{yy}) - \chi_{xy}\chi_{yx}.$$

Изгибающие моменты определим по формулам

$$\frac{M_x}{EJ_{yy}} = -\frac{d^2\eta}{dz^2} + k_{yx}\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_x}{GF}\right) + k_{yy}\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_y}{GF}\right) + k_{y\omega}\frac{d}{dz}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right),$$
$$\frac{M_y}{EJ_{xx}} = \frac{d^2\xi}{dz^2} - k_{xx}\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_x}{GF}\right) - k_{xy}\frac{d}{dz}\left(\frac{Q_y}{GF}\right) - k_{x\omega}\frac{d}{dz}\left(\frac{M_\omega}{GF}\right).$$

И, соответственно, в начале и конце стержня получаем:

$$M_{x0} = -EJ_{yy}\left\{-\frac{6}{l^2}\eta_0 + \frac{4}{l}\phi_0 + \frac{6}{l^2}\eta_l + \frac{2}{l}\phi_l - \frac{6}{l}\alpha_x - k_{\omega y}\frac{6}{l}f\frac{GJ_d}{GF}\left(\frac{\theta_l - \theta_0}{l} - \frac{\delta_0 + \delta_l}{2} - \alpha_\omega\right)\right\},$$
$$M_{xl} = -EJ_{yy}\left\{\frac{6}{l^2}\eta_0 - \frac{2}{l}\phi_0 - \frac{6}{l^2}\eta_l - \frac{4}{l}\phi_l + \frac{6}{l}\alpha_x + k_{\omega y}\frac{6}{l}f\frac{GJ_d}{GF}\left(\frac{\theta_l - \theta_0}{l} - \frac{\delta_0 + \delta_l}{2} - \alpha_\omega\right)\right\},$$
$$M_{y0} = EJ_{xx}\left\{-\frac{6}{l^2}\xi_0 - \frac{4}{l}\varphi_0 + \frac{6}{l^2}\xi_l - \frac{2}{l}\varphi_l - \frac{6}{l}\alpha_y - k_{\omega x}\frac{6}{l}f\frac{GJ_d}{GF}\left(\frac{\theta_l - \theta_0}{l} - \frac{\delta_0 + \delta_l}{2} - \alpha_\omega\right)\right\}, \qquad (10)$$
$$M_{yl} = EJ_{xx}\left\{\frac{6}{l^2}\xi_0 + \frac{2}{l}\varphi_0 - \frac{6}{l^2}\xi_l + \frac{4}{l}\varphi_l + \frac{6}{l}\alpha_y + k_{\omega x}\frac{6}{l}f\frac{GJ_d}{GF}\left(\frac{\theta_l - \theta_0}{l} - \frac{\delta_0 + \delta_l}{2} - \alpha_\omega\right)\right\}.$$

Выражения (4), (7), (8), (10) дают возможность сформировать матрицу жесткости стержня. Процедура вычисления коэффициентов матрицы достаточно громоздка. Мы приведем окончательный результат. Представим матрицу жесткости в виде клеточной матрицы

Матрица R_{00}

	ξ_0	η_0	ζ_0	ϕ_0	φ_0	θ_0	δ_0
$Q_{\xi 0}$	$\beta_x\frac{12EJ_{xx}}{l^3}$	$-\gamma\frac{12EJ_m}{l^3}$	0	$\gamma\frac{6EJ_m}{l^2}$	$\beta_x\frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{l}$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{2}$
$Q_{\eta 0}$	$-\gamma\frac{12EJ_m}{l^3}$	$\beta_y\frac{12EJ_{yy}}{l^3}$	0	$-\beta_y\frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	$-\gamma\frac{6EJ_m}{l^2}$	$-\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{l}$	$-\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{2}$
$N_{\zeta 0}$	0	0	$\frac{EF}{l}$	0	0	0	0
$M_{\xi 0}$	$\gamma\frac{6EJ_m}{l^2}$	$-\beta_y\frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	0	$(3\beta_y+1)\frac{EJ_{yy}}{l}$	$\gamma\frac{3EJ_m}{l}$	$\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{2}$	$\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{4}l$
$M_{\eta 0}$	$\beta_x\frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$-\gamma\frac{6EJ_m}{l^2}$	0	$\gamma\frac{3EJ_m}{l}$	$(3\beta_x+1)\frac{EJ_{xx}}{l}$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{2}$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{4}l$
$M_{\zeta 0}$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{l}$	$-\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{l}$	0	$\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{2}$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{2}$	$GJ_d\frac{\mu\lambda sh(\lambda l)}{D} + \frac{EJ_c}{l}$	$GJ_d\frac{ch(\lambda l)-1}{D} + \frac{EJ_c}{2}$
$B_{\omega 0}$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{2}$	$-\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{2}$	0	$\kappa_y\frac{EJ_{yy}}{4}l$	$-\kappa_x\frac{EJ_{xx}}{4}l$	$GJ_d\frac{ch(\lambda l)-1}{D} + \frac{EJ_c}{2}$	$GJ_d\frac{\mu\lambda l ch(\lambda l) - sh(\lambda l)}{\mu\lambda D} + \frac{EJ_c}{4}l$

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} \widehat{R}_{00} & \widehat{R}_{0l} \\ \widehat{R}_{l0} & \widehat{R}_{ll} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\widehat{R}_{0l}$

	ξ_l	η_l	ζ_l	ϕ_l	φ_l	θ_l	δ_l
$Q_{\xi 0}$	$-\beta_x \frac{12EJ_{xx}}{l^3}$	$\gamma \frac{12EJ_m}{l^3}$	0	$\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$\beta_x \frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{l}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$
$Q_{\eta 0}$	$\gamma \frac{12EJ_m}{l^3}$	$-\beta_y \frac{12EJ_{yy}}{l^3}$	0	$-\beta_y \frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	$-\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{l}$	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$
$N_{\zeta 0}$	0	0	$-\frac{EF}{l}$	0	0	0	0
$M_{\xi 0}$	$-\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$\beta_y \frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	0	$(3\beta_y - 1)\frac{EJ_{yy}}{l}$	$\gamma \frac{3EJ_m}{l}$	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{4} l$
$M_{\eta 0}$	$-\beta_x \frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	0	$\gamma \frac{3EJ_m}{l}$	$(3\beta_x - 1)\frac{EJ_{xx}}{l}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{4} l$
$M_{\zeta 0}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{l}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{l}$	0	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$-GJ_d \frac{\mu\lambda sh(\lambda l)}{D} - \frac{EJ_c}{l}$	$GJ_d \frac{ch(\lambda l)-1}{D} + \frac{EJ_c}{2}$
$B_{\omega 0}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	0	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{4} l$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{4} l$	$-GJ_d \frac{ch(\lambda l)-1}{D} - \frac{EJ_c}{2}$	$GJ_d \frac{sh(\lambda l)-\mu\lambda l}{\mu\lambda D} + \frac{EJ_c}{4} l$

Матрица $\widehat{R}_{l0}$

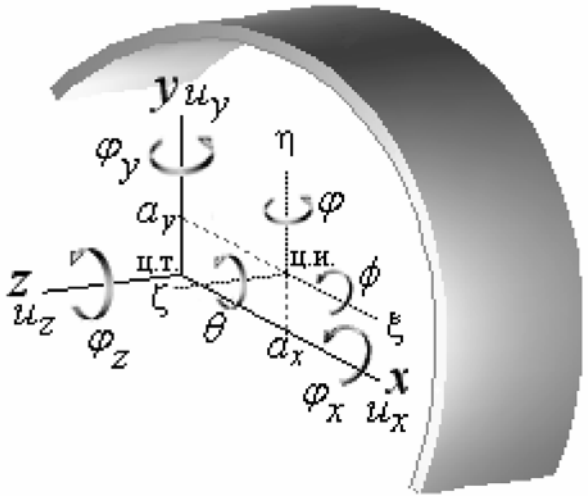
	ξ_0	η_0	ζ_0	ϕ_0	φ_0	θ_0	δ_0
$Q_{\xi l}$	$-\beta_x \frac{12EJ_{xx}}{l^3}$	$\gamma \frac{12EJ_m}{l^3}$	0	$-\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$-\beta_x \frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{l}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$
$Q_{\eta l}$	$\gamma \frac{12EJ_m}{l^3}$	$-\beta_y \frac{12EJ_{yy}}{l^3}$	0	$\beta_y \frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	$\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{l}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$
$N_{\zeta l}$	0	0	$-\frac{EF}{l}$	0	0	0	0
$M_{\xi l}$	$\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$-\beta_y \frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	0	$(3\beta_y - 1)\frac{EJ_{yy}}{l}$	$\gamma \frac{3EJ_m}{l}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{4} l$
$M_{\eta l}$	$\beta_x \frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$-\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	0	$\gamma \frac{3EJ_m}{l}$	$(3\beta_x - 1)\frac{EJ_{xx}}{l}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{4} l$
$M_{\zeta l}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{l}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{l}$	0	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$-GJ_d \frac{\mu\lambda sh(\lambda l)}{D} - \frac{EJ_c}{l}$	$-GJ_d \frac{ch(\lambda l)-1}{D} - \frac{EJ_c}{2}$
$B_{\omega l}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	0	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{4} l$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{4} l$	$GJ_d \frac{ch(\lambda l)-1}{D} + \frac{EJ_c}{2}$	$GJ_d \frac{sh(\lambda l)-\mu\lambda l}{\mu\lambda D} + \frac{EJ_c}{4} l$

Матрица $\widehat{R}_{ll}$

	ξ_l	η_l	ζ_l	ϕ_l	φ_l	θ_l	δ_l
$Q_{\xi l}$	$\beta_x \frac{12EJ_{xx}}{l^3}$	$-\gamma \frac{12EJ_m}{l^3}$	0	$-\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$-\beta_x \frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{l}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$
$Q_{\eta l}$	$-\gamma \frac{12EJ_m}{l^3}$	$\beta_y \frac{12EJ_{yy}}{l^3}$	0	$\beta_y \frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	$\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{l}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$
$N_{\zeta l}$	0	0	$\frac{EF}{l}$	0	0	0	0
$M_{\xi l}$	$-\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	$\beta_y \frac{6EJ_{yy}}{l^2}$	0	$(3\beta_y + 1)\frac{EJ_{yy}}{l}$	$\gamma \frac{3EJ_m}{l}$	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{4} l$
$M_{\eta l}$	$-\beta_x \frac{6EJ_{xx}}{l^2}$	$\gamma \frac{6EJ_m}{l^2}$	0	$\gamma \frac{3EJ_m}{l}$	$(3\beta_x + 1)\frac{EJ_{xx}}{l}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{4} l$
$M_{\zeta l}$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{l}$	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{l}$	0	$-\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$GJ_d \frac{\mu\lambda sh(\lambda l)}{D} + \frac{EJ_c}{l}$	$-GJ_d \frac{ch(\lambda l)-1}{D} - \frac{EJ_c}{2}$
$B_{\omega l}$	$\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{2}$	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{2}$	0	$\kappa_y \frac{EJ_{yy}}{4} l$	$-\kappa_x \frac{EJ_{xx}}{4} l$	$-GJ_d \frac{ch(\lambda l)-1}{D} - \frac{EJ_c}{2}$	$GJ_d \frac{\mu\lambda l ch(\lambda l) - sh(\lambda l)}{\mu\lambda D} + \frac{EJ_c}{4} l$

$$\beta_x = \frac{1+\chi_{yy}}{\Delta}, \quad \beta_y = \frac{1+\chi_{xx}}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{12}{l^2}\frac{EJ_m}{GF}\left(k_{xy} - k_{\omega x}k_{\omega y} f \frac{GJ_d}{GF}\right) = \frac{12}{l^2}\frac{EJ_m}{GF}\left(k_{yx} - k_{\omega y}k_{\omega x} f \frac{GJ_d}{GF}\right),$$

$$EJ_c = f\frac{GJ_d}{GF}\left(k_{\omega x}\kappa_x EJ_{xx} + k_{\omega y}\kappa_y EJ_{yy}\right), \quad J_m = \sqrt{J_{xx}J_{yy}}.$$



Теперь осталось сделать последний шаг – надо привести матрицу реакций к главным осям сечения. Если центр изгиба совпадает с центом тяжести сечения, то построенная выше матрица как раз и является решением проблемы. Если центр изгиба не совпадает с центом тяжести, необходимо привести матрицу жесткости элемента к главным осям координат сечения. Пусть u_x, u_y, u_z, φ_x, φ_y, φ_z – перемещения точки, лежащей на оси, проходящей через центр тяжести сечения. Если α_x и α_y – координаты центра изгиба относительно главных осей, то справедливы следующие соотношения:

$$\xi = u_x - a_y\varphi_z, \quad \phi = \varphi_x,$$
$$\eta = u_y + a_x\varphi_z, \quad \varphi = \varphi_y,$$
$$\zeta = u_z, \qquad \theta = \varphi_z.$$

Таким образом, матрица преобразования от переменных (u_x, u_y, u_z, φ_x, φ_y, φ_z, δ) к (ξ, η, ζ, ϕ, φ, θ, δ) будет имеет вид (δ — депланация сечения)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая клетки матрицы жесткости стержня слева на транспонированную матрицу B^* и справа на матрицу B, получаем искомую матрицу единичных реакций стержня в системе переменных (u_x, u_y, u_z, φ_x, φ_y, φ_z, δ)

$$\hat{R}'_{sr} = \hat{A}^* \cdot \hat{R}_{sr} \cdot \hat{A}, \quad s,r = 0,l\,.$$

Литература

1. *Бритвин Е.И.* К расчету рамных конструкций составленных из тонкостенных стержневых элементов. Строительная механика и расчет сооружений, 2016. № 4. С. 43—54.

2. *Бритвин Е.И.* Влияние деформации сдвига на изгиб и кручение тонкостенных стержней. Строительная механика и расчет сооружений, 2016. № 5. С. 59—65.

3. *Панасенко Н.Н., Юзиков В.П., Синельщиков А.В.* Конечно-элементная модель пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля в 2-х ч. Ч.1, Вестник АГТУ. Сер.: Морская техника и технология. 2015. № 3. С. 89—100.

4. *Юзиков В.П., Завьялова О.Б.* Учет сдвига срединной поверхности при расчете тонкостенных стержней открытого профиля на статические и динамические воздействия. Научный потенциал регионов на службу модернизации. — Астрахань: АИСИ, 2011. С. 69—75.